CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

On se propose d'étudier quelques propriétés des applications linéaires inversibles de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ ainsi que de leurs matrices.

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est supposé muni de sa base canonique ordonnée $\mathcal{B}_n = (e_1, ..., e_n)$, $e_i = (\delta_{1i}, ..., \delta_{ni})$, δ_{ij} désignant le symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$).

On choisit sur $\mathbb{R}^n$ la norme euclidienne usuelle : $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$, avec $x = (x_1, ..., x_n)$. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n.

Alors, $\mathcal{M} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : "$\mathcal{M}(f)$ est la matrice de f relativement à $\mathcal{B}_n$", est un isomorphisme d'algèbre de $\left(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), +, \cdot, \circ\right)$ sur $\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \times\right)$, où + désigne l'addition, . désigne la multiplication par les scalaires, $\circ$ la composition des applications et $\times$ le produit matriciel.

Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\|f\| = \sup\left\{\|f(x)\|_2 : \|x\|_2 \leq 1\right\}$ sera la norme subordonnée de f associée à $\|\ \|_2$, on notera aussi $\|\ \|$ la norme transportée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\mathcal{M}$, c'est à dire que $\|M\| = \left\|\mathcal{M}^{-1}(M)\right\|$ ($M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

On rappelle que $\left(\left(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), +, \cdot, \circ\right), \|\ \|\right)$ et $\left(\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \times\right), \|\ \|\right)$ sont des algèbres de Banach unitaires et que $\mathcal{M}$ est un isomorphisme isométrique de la première algèbre sur la seconde : de ce fait toutes les propriétés, établies dans le texte, sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ se transposent immédiatement sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On notera I_n l'élément neutre de $\left(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \circ\right)$ et J_n celui de $\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \times\right)$.

On pose $\det : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{Det} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, où $\det(f)$ désigne le déterminant de f et $\mathrm{Det}(M) = \det\left(\mathcal{M}^{-1}(M)\right)$ est le déterminant de M.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = (\alpha_{i,j})$ signifie que $\alpha_{i,j}$ est le réel situé sur la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne de M, $\alpha_{i,j}$ est une "entrée" de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de M.

Pour $k \in \{1,...,n\}$ on définit $L_k : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ par $L_k(M) = (\alpha_{k,1},...,\alpha_{k,n})$ si $M = (\alpha_{i,j})$. Si $L_k(M) \neq (0,...,0)$ on notera $p(k) = \min\{j \in \{1,...,n\} : \alpha_{k,j} \neq 0\}$ et on dira que $\alpha_{k,p(k)}$ est "l'entrée principale" de $L_k(M)$.

Dans tout le problème, on appelle "groupe linéaire d'ordre n", et on note $GL(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble suivant : $GL(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) : (\exists g)((g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \text{ et } (g \circ f = I_n))\}$, (i.e. $f \in GL(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si f possède une "inverse linéaire à gauche") de même $GL_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}(GL(\mathbb{R}^n))$ sera le "groupe matriciel d'ordre n".

La partie II est autonome ; la partie III peut se traiter en admettant II.3.4.

I. On se propose, dans cette partie, d'établir les résultats de base relatifs aux groupes linéaires et matriciels.

1) Montrer que $f \in GL(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si f est une bijection linéaire de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$, (donc $GL_n(\mathbb{R})$ n'est autre que l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n) et que $(GL(\mathbb{R}^n), \circ)$ et $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ sont bien des groupes ; si $f \in GL(\mathbb{R}^n)$ et si $M \in GL_n(\mathbb{R})$ on notera f^{-1} et M^{-1} leurs inverses dans ces groupes.

2) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, on définit $(f^p)_{p \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ par $f^0 = I_n$, $f^{p+1} = f^p \circ f$; on rappelle que si $\|f\| < 1$, alors $I_n - f \in GL(\mathbb{R}^n)$ et $(I_n - f)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} f^i$.

2.1 Soit $p \in \mathbb{N}^*$, soit $(f_1,...,f_p) \in (\mathcal{L}(\mathbb{R}^n))^p$ montrer que : $\|f_1 \circ ... \circ f_p\| \leq \|f_1\| ... \|f_p\|$ et en déduire que $(f_1,...,f_p) \to f_1 \circ ... \circ f_p$ est continue (donc $(M_1,...,M_p) \to M_1 \times ... \times M_p$ est continue avec $(M_1,...,M_p) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^p$).

2.2a. Soit $f \in GL(\mathbb{R}^n)$, montrer que si $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifie $\|g\| < \|f^{-1}\|^{-1}$, on a : $f + g \in GL(\mathbb{R}^n)$ (on aura intérêt à écrire : $f + g = f \circ (I_n + f^{-1} \circ g)$).

2.2b. Montrer que : $(f+g)^{-1} - f^{-1} = ((I_n + f^{-1} \circ g)^{-1} - I_n) \circ f^{-1}$ et en déduire que $f \to f^{-1}$ est continue (donc $M \to M^{-1}$ est continue).

3) **a.** Montrer que Det est une application continue ; en déduire qu'il en est de même pour det.

b. On définit $GL_+(\mathbb{R}^n)$, $GL_-(\mathbb{R}^n)$, $GL_{n+}(\mathbb{R})$, $GL_{n-}(\mathbb{R})$ comme suit :

$GL_+(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) : \det(f) > 0\}$, $GL_-(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) : 0 > \det(f)\}$

$GL_{n+}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : Det(M) > 0\}$, $GL_{n-}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : 0 > Det(M)\}$

Montrer que $GL(\mathbb{R}^n) = GL_+(\mathbb{R}^n) \cup GL_-(\mathbb{R}^n)$ (donc $GL_n(\mathbb{R}) = GL_{n+}(\mathbb{R}) \cup GL_{n-}(\mathbb{R})$).
Montrer que $GL_+(\mathbb{R}^n)$, $GL_-(\mathbb{R}^n)$ sont ouverts (donc $GL_{n+}(\mathbb{R})$ et $GL_{n-}(\mathbb{R})$ sont ouverts).

4) Montrer que $(GL_+(\mathbb{R}^n), \circ)$ et $(GL_{n+}(\mathbb{R}), \times)$ sont des sous groupes de $(GL(\mathbb{R}^n), \circ)$ et $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$. Qu'en est-il de $GL_-(\mathbb{R}^n)$ et $GL_{n-}(\mathbb{R})$?

5) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, on définit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $u(t) = \det(f + t \cdot I_n)$

5.1 Montrer que u est une fonction polynomiale de degré n.

5.2 Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ tel que l'on ait : $\{f + t \cdot I_n : t \in]0, \alpha[\} \subset GL(\mathbb{R}^n)$. En déduire que $GL(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ (donc $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

II. Dans cette partie, on montre comment on peut calculer l'inverse d'un élément de $GL_n(\mathbb{R})$ en utilisant des "transformations élémentaires" sur les lignes des matrices.

Définitions :

1- Soit $M = (\alpha_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on dira que M est "L - réduite " si et seulement si :

- soit M est la matrice nulle (notée $0_{\mathcal{M}_n}$),
- soit, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $L_k(M) \neq (0, \ldots, 0)$ alors $\alpha_{k,p(k)} = 1$ et $\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{j,p(k)}| = 1$

(où $\alpha_{k,p(k)}$ est "l'entrée principale" de $L_k(M)$).

2-

$$\mathcal{E}l_1(n) = \bigcup_{(k,\lambda) \in \{1,\ldots,n\} \times \mathbb{R}^*} \{A_{1,k,\lambda}\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

où $A_{1,k,\lambda} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \lambda & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow k^{\text{ième}} \text{ ligne}$$

$\uparrow k^{\text{ième}}$ colonne

$\left(L_i(A_{1,k,\lambda}) = e_i \quad \text{si} \quad i \neq k, \quad L_k(A_{1,k,\lambda}) = \lambda e_k\right)$

3-

$$\mathcal{E}l_2(n) = \bigcup_{((k,p),\lambda) \in \left(\bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} (\{i\} \times (\{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}))\right) \times \mathbb{R}} \{A_{2,k,p,\lambda}\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

où $A_{2,k,p,\lambda}$ s'écrit :

$$A_{2,k,p,\lambda}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & & & & \\ \vdots & 0 & 1 & & & & & & & \\ \vdots & & 0 & \ddots & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & & \\ \vdots & & 0 & & & \ddots & & & & \\ \vdots & \cdots & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & & 0 & & & & & \ddots & & \\ \vdots & & \vdots & & & & & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow k^{\text{ième}} \text{ ligne}$$

$$\uparrow p^{\text{ième}} \text{ colonne}$$

$$\left(L_i(A_{2,k,p,\lambda})=e_i \quad \text{si} \quad i\neq k, \quad L_k(A_{2,k,p,\lambda})=e_k+\lambda e_p\right)$$

4- $\mathcal{E}l_3(n)= \bigcup_{(k,p)\in\{1,\ldots,n\}^2} \{A_{3,k,p}\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

avec $A_{3,k,p}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & & 0 \\ & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow k^{\text{ième}} \text{ ligne} \\ \\ \leftarrow p^{\text{ième}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \end{matrix}$

$$\uparrow k^{\text{ième}} \qquad \uparrow p^{\text{ième}} \text{ colonnes}$$

$$\left(L_i(A_{3,k,p})=e_i \quad \text{si} \quad i\notin\{k,p\}, \quad L_k(A_{3,k,p})=e_p, \quad L_p(A_{3,k,p})=e_k\right)$$

On définit alors $\mathcal{E}l(n) = \bigcup_{i\in\{1,2,3\}} \mathcal{E}l_i(n)$, un élément de $\mathcal{E}l(n)$ s'appelle une matrice élémentaire d'ordre n, de type i s'il appartient à $\mathcal{E}l_i(n)$.

5- On appelle opération élémentaire de type 1, 2 ou 3 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note $\mathcal{T}_{1,k,\lambda}$, $\mathcal{T}_{2,k,p,\lambda}$, $\mathcal{T}_{3,k,p}$ $\left((k,p)\in\{1,\ldots,n\}^2, \lambda\in\mathbb{R}\right)$ toute application (de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) du type :

$$\mathcal{T}_{1,k,\lambda}(M)=A_{1,k,\lambda}\times M \; ; \quad \mathcal{T}_{2,k,p,\lambda}(M)=A_{2,k,p,\lambda}\times M \; ; \quad \mathcal{T}_{3,k,p}(M)=A_{3,k,p}\times M \; ;$$

avec $A_{1,k,\lambda}\in\mathcal{E}l_1(n)$, $A_{2,k,p,\lambda}\in\mathcal{E}l_2(n)$ et $A_{3,k,p}\in\mathcal{E}l_3(n)$.

On définit alors :

$\mathcal{O}_1(n)=\left\{\mathcal{T}_{1,k,\lambda} : A_{1,k,\lambda}\in\mathcal{E}l_1(n)\right\}$, $\mathcal{O}_2(n)=\left\{\mathcal{T}_{2,k,p,\lambda} : A_{2,k,p,\lambda}\in\mathcal{E}l_2(n)\right\}$, $\mathcal{O}\,3(n)=\left\{\mathcal{T}_{3,k,p} : A_{3,k,p}\in\mathcal{E}l_3(n)\right\}$:

$\mathcal{O}(n)= \bigcup_{i\in\{1,2,3\}} \mathcal{O}_i(n)$ est l'ensemble des opérations élémentaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6- Soit $(M,\ N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on dira que N est "L - équivalente" à M s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $\left(\mathcal{T}^{(1)},...,\mathcal{T}^{(q)}\right) \in \left(\mathcal{B}(n)\right)^q$ tels que : $N = \left(\mathcal{T}^{(1)} \circ \mathcal{T}^{(2)} \circ ... \circ \mathcal{T}^{(q)}\right)(M)$.

1) Soit $M = \left(\alpha_{i,j}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\mathcal{T}_{1,k,\lambda}(M)$, $\mathcal{T}_{2,k,p,\lambda}(M)$, $\mathcal{T}_{3,k,p}(M)$ et donner une interprétation simple des opérations élémentaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Calculer $\mathrm{Det}(A_{1,k,\lambda})$, $\mathrm{Det}(A_{2,k,p,\lambda})$, $\mathrm{Det}(A_{3,k,p})$ et montrer que $\mathcal{E}l(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$.
Calculer $(A_{1,k,\lambda})^{-1}$, $(A_{2,k,p,\lambda})^{-1}$, $(A_{3,k,p})^{-1}$ et en déduire que la "L - équivalence" est bien une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est "L - équivalente" à M, alors $N \in GL_n(\mathbb{R})$.

3) On se propose de montrer que tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est "L - équivalent" à une matrice "L - réduite" et ce, en utilisant uniquement des opérations élémentaires de type 1 ou 2.

Soit $M = (\alpha_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (on suppose que $M \neq 0_{\mathcal{M}_n}$), on suppose que pour k donné, $k \in \{1,...,n\}$, on a pu trouver $\left(\mathcal{T}^{(1)},...,\mathcal{T}^{(q(k))}\right) \in \left(\mathcal{B}_1(n) \cup \mathcal{B}_2(n)\right)^{q(k)}$ tel que $M_{(k)} = \left(\mathcal{T}^{(1)} \circ ... \circ \mathcal{T}^{(q(k))}\right)(M) = \left(\alpha_{i,j}{}^{(k)}\right)$ vérifie la propriété $(P(k))$.

$(P(k))$: pour tout $i \in \{1,...,k\}$, soit $L_i(M_{(k)}) = (0,...,0)$, soit $\alpha_{i,p_{(i)}}{}^{(k)} = 1$ et $\sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_{j,p_{(i)}}{}^{(k)}\right| = 1$ ($\alpha_{i,p_{(i)}}{}^{(k)}$ étant "l'entrée principale" de $L_i(M_{(k)})$).

Si pour tout $i \in \{k+1,...,n\}$ on a $L_i(M_{(k)}) = (0,...,0)$ alors $M_{(k)}$ est "L - réduite", de même si $k = n$; de plus M et $M_{(k)}$ sont "L - équivalentes" par des opérations élémentaires de type 1 ou 2. Si $M_{(k)}$ est "L - réduite" c'est fini, sinon soit $m(k) = \min\left\{i \in \{k+1,...,n\} : L_i\left(M_{(k)}\right) \neq (0,...,0)\right\}$.

3.1 Montrer qu'il existe $\mathcal{T}_{1,m(k),\lambda} \in \mathcal{B}_1(n)$ tel que l'on ait : $\mathcal{T}_{1,m(k),\lambda}\left(M_{(k)}\right) = M'_{(k)} = \left(\alpha'_{i,j}{}^{(k)}\right)$ vérifie $(P(k))$, et $\alpha'^{(k)}_{m(k),p(m(k))} = 1$ (où $\alpha'^{(k)}_{m(k),p(m(k))}$ est "l'entrée principale" de $L_{m(k)}(M'_{(k)})$).

3.2 Soit $\{i_1,...,i_{n-1}\} = \{1,...,n\} \setminus \{m(k)\}$, montrer qu'il existe $\left(\mathcal{T}_{2,i_j,m(k),\lambda_{i_j}}\right)_{j \in \{1,...i_{n-1}\}}$ tel que l'on ait : $M_{(m(k))} = \mathcal{T}_{2,i_1,m(k),\lambda_{i_1}} \circ ... \circ \mathcal{T}_{2,i_{n-1},m(k),\lambda_{i_{n-1}}}(M'_{(k)})$ vérifie $(P(m(k)))$. Montrer que ceci établit le résultat énoncé au début du II.3.

3.3 On s'intéresse à l'algorithme permettant de calculer les entrées de $M_{(m(k))}$ à partir de la donnée de celles de $M_{(k)}$. On pose, pour simplifier l'écriture, $M_{(k)} = (a_{i,j})$, $m(k) = m$, $M_{(m(k))} = (b_{i,j})$; expliciter les formules permettant le calcul des $b_{i,j}$ à partir des $a_{i,j}$.

3.4 Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer que, si M est "L - réduite", il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $\left(\mathcal{T}_{3,k_i,p_i}\right)_{i \in \{1,...q\}} \in \left(\mathcal{B}_3(n)\right)^q$ tels que $\left(\mathcal{T}_{3,k_1,p_1} \circ \mathcal{T}_{3,k_2,p_2} \circ ... \circ \mathcal{T}_{3,k_q,p_q}\right)(M) = J_n$. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{R})$ si et seulement si M est un produit d'éléments de $\mathcal{E}l(n)$.

III. Nous allons montrer que $GL_{n+}(\mathbb{R}), GL_{n-}(\mathbb{R}), GL_+(\mathbb{R}^n), GL_-(\mathbb{R}^n)$ sont connexes par arcs. Il s'agit d'un résultat important et non évident, bien qu'élémentaire.

A. Soit $M \in GL_{n+}(\mathbb{R})$ d'après II.3.4, il existe $(B_i)_{i\in\{1,\dots,m\}} \in (\mathcal{E}l(n))^m$ tel que l'on ait : $M = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_m$.

1. Montrer que $\{i \in \{1,\dots,m\} : B_i \in GL_{n-}(\mathbb{R})\}$ possède un nombre pair d'éléments.

2. **a)** Soit $A_{1,k,\lambda} \in \mathcal{E}l_1(n) \cap GL_{n+}(\mathbb{R})$, soit $\varphi : [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(t) = A_{1,k,(1-t)\lambda+t}$
Montrer que φ est continue, que $\varphi([0,1]) \subset GL_{n+}(\mathbb{R})$ et calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$.

b) Soit $A_{1,k,\lambda} \in \mathcal{E}l_1(n) \cap GL_{n-}(\mathbb{R})$, soit $\psi : [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\psi(t) = A_{1,k,(1-t)\lambda-t}$
Montrer que ψ est continue, que $\psi([0,1]) \subset GL_{n-}(\mathbb{R})$ et calculer $\psi(0)$ et $\psi(1)$.

3. Soit $A_{2,k,p,\lambda} \in \mathcal{E}l_2(n)$, soit $\chi : [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\chi(t) = A_{2,k,p,(1-t)\lambda}$.
Montrer que χ est continue, que $\chi([0,1]) \subset GL_{n+}(\mathbb{R})$, et calculer $\chi(0)$ et $\chi(1)$.

4. Soit $A_{3,k,p} \in \mathcal{E}l_3(n) (k \neq p)$, soit $\omega : [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$L_i(\omega(t)) = e_i$ si $i \notin \{k, p\}$,

$$L_k(\omega(t)) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).e_k + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right).e_p,$$

$$L_p(\omega(t)) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).e_p + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right).e_k$$

Montrer que ω est continue, que $\omega([0,1]) \subset GL_{n-}(\mathbb{R})$, et calculer $\omega(0)$ et $\omega(1)$.

5. En utilisant ce qui précède, montrer qu'il existe σ, $\sigma : [0,1] \to GL_{n+}(\mathbb{R})$, σ continue, telle que l'on ait : $\sigma(0) = M$ et $L_i(\sigma(1)) = \varepsilon_i . e_i$, $\varepsilon_i \in \{-1,1\}$ et $\{i \in \{1,\dots,n\} : \varepsilon_i = -1\}$ possède un nombre pair d'éléments.

6. Soit $\{p,k\} \subset \{1,\dots,n\}$, $p \neq k$, soit $N_{(p,k)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec :

$$L_i\left(N_{(p,k)}\right) = e_i \quad \text{si} \quad i \notin \{p,k\}$$

$$L_k\left(N_{(p,k)}\right) = -e_k,$$

$$L_p\left(N_{(p,k)}\right) = -e_p$$

Soit $\rho : [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$L_i(\rho(t)) = e_i$ si $i \notin \{p,k\}$
$L_k(\rho(t)) = -\cos(\pi t) . e_k + \sin(\pi t) . e_p$,
$L_p(\rho(t)) = -\cos(\pi t) . e_p - \sin(\pi t) . e_k$

Montrer que ρ est continue, que $\rho([0,1]) \in GL_{n+}(\mathbb{R})$, et calculer $\rho(0)$ et $\rho(1)$.

7. En utilisant III.A.5 et III.A.6, montrer qu'il existe μ, $\mu : [0,1] \to GL_{n+}(\mathbb{R})$, μ continue, telle que l'on ait $\mu(0) = M$, $\mu(1) = J_n$. Déduire de ceci que $GL_{n+}(\mathbb{R})$ est connexe par arcs (donc $GL_+(\mathbb{R}^n)$ est connexe par arcs).

B. Soit $M \in GL_{n-}(\mathbb{R})$, montrer, en s'inspirant de III.A qu'il existe ν, $\nu : [0,1] \to GL_{n-}(\mathbb{R})$, ν continue, telle que l'on ait : $\nu(0) = M$, $\nu(1) = A_{1,1,-1}$

Déduire de ceci que $GL_{n-}(\mathbb{R})$ est connexe par arcs (donc $GL_-(\mathbb{R}^n)$ est connexe par arcs).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail